Lycée secondaire : Ibn Sina Menzel Bourguiba	Devoir de synthèse N° 1	Classe : 4 T 2
Prof : Béjaoui	Epreuve : Mathématiques	Année Scolaire :2022 / 2023 Durée : 2 hs

Exercice N°1 : (3 pts) : *Pour chacune des questions suivantes, une seule réponse est exactes, le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre qui correspond à la bonne réponse. Aucune justification n'est demandée.*

1) Soit f une fonction continue et strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty\ ,\ 2022]$ et tel que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et f(2022) = - 2023 , alors l'équation x + f (x) = 0 admet :
   a) Aucune solution b) une unique solution c) Deux solutions
2) Le nombre complexe $(1 - i)\, e^{i\frac{\pi}{6}}$ est une racine carrée de :
   a) $-\sqrt{3} + i$ b) $\sqrt{3} - i$ c) $\sqrt{3} + i$.
3) Soit $n \in IN^*$, le nombre complexe $(1 + i\sqrt{3})^n$ est un réel si et seulement si ,n s'écrit sous la forme :
   a) 3k + 2 b) 3k +1 c) 3k où $k \in IN^*$

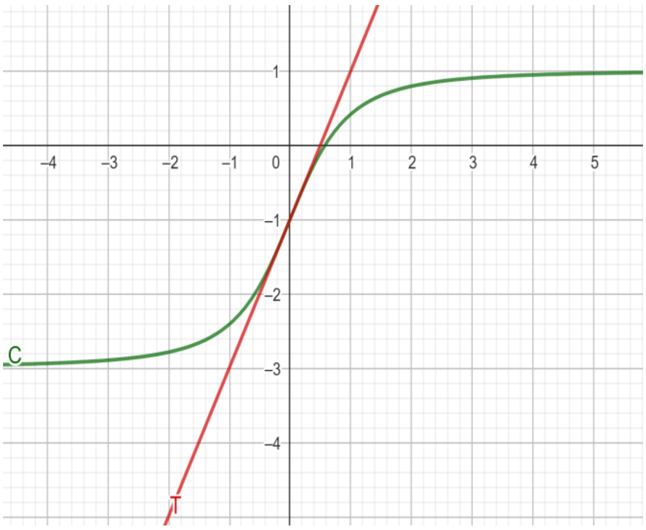
Exercice N°2 : (3,5 pts) :

Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x) = \begin{cases} (x+1)\sqrt{x} & si\ \ x \geq 0 \\ 3x^2 + x^3 & si\ \ x < 0 \end{cases}$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{u}\ ,\vec{v}\ )$.

1) Etudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter graphiquement ce résultat.
2) Calculer f ' (x) . Dresser le tableau de variation de f.
3) Montrer que le point I (-1 , 2) est un point d'inflexion de la courbe (C).

Exercice N°3 : (6,5 pts) :



I)

Dans la figure ci - contre (C) est la courbe représentative d'une fonction g dérivable sur IR . la courbe (C) admet :

- Deux asymptotes horizontales d'équations y = - 3 et y = 1 .
- Une tangente (T) au point d'abscisse 0 .
- Un point d'inflexion d'abscisse 0.

1) Par une lecture graphique déterminer :

BEJAOUI A
Tunisie DEVOIR.TN

$g(0)$, $g'(0)$, $g''(0)$, $\lim_{x \to +\infty} g(x)$, $\lim_{x \to -\infty} g(x)$ et $\lim_{x \to 0} \frac{g(x)+1}{x}$.

2)Dresser le tableau de variation de g.

3) a) Montrer que l'équation g (x) = 0 possède dans IR une unique solution α.

Vérifier que : $0 < \alpha < 1$.

b) Donner le signe de g(x).

4) On admet que $g(x) = \frac{ax}{\sqrt{1+x^2}} + b$ où a et b des réels .

Montrer que a = 2 et b = -1.

II) Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x) = 2\sqrt{1+x^2} - x$.

1) a)Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

b)Vérifier que : $f(\alpha) = 3\alpha$.

2) a) Montrer que : $f'(x) = g(x)$, $\forall\ x \in$ IR.

b) Dresser le tableau de variation de f.

3) On désigne par (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Montrer que les droites ($\Delta : y = x$) et ($\Delta' : y = -3x$) sont des asymptotes obliques à la courbe (C_f).

b) Ecrire une équation de la tangente (T_A) à la courbe (C_f) au point A (0 , 2).

4) Tracer (T_A) , (Δ) , (Δ') et (C_f) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

5) a) Montrer que pour tout réel positif x , on a : $|f'(x)| \leq 1$.

b) En déduire que pour tout réel positif x , on a : $|f(x) - 2| \leq |x|$.

<u>Exercice N°4 : (7 pts)</u>

I)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On donne les points A , B et C d'affixes respectives 2 + 2i , 2i et 2 , ainsi que le cercle (Γ) de centre A et de rayon 2 . La droite (OA) coupe le cercle (Γ) en deux points H et K tel que OH < OK.

1) Faire une figure en prenant 2cm comme unité graphique.

2) a) Calculer OA , OH et OK.

b) Justifier que : $z_H = (2 - \sqrt{2})(1 + i)$ et $z_K = (2 + \sqrt{2})(1 + i)$

II)

BEJAOUI A

Tunisie DEVOIR.TN

1) a) Vérifier que $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\, i$ est une racine carrée de i.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$,l'équation (E) : $\frac{1}{4}z^2 - (1 + i)\, z + i = 0$.

c) En déduire les solutions complexes de l'équation :

$$(E') : \frac{1}{4}z^4 - (1 + i)\, z^2 + i = 0.$$

III) Soit $\theta \in [\,0\,, \pi\,]$.

1) a) Vérifier que : $(\,i\, sin\theta)^2 = (cos\theta)^2 - 1$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E_θ) : $z^2 - 2\cos\theta\, z + 1 = 0$.

2) On considère dans $\mathbb{C}$, le polynôme :

$$P(z) = z^3 - (i + 2\cos\theta)\, z^2 + (1 + 2i\cos\theta)\, z - i$$

a)Vérifier que i est une racine de P

b) Trouver a et b tels que : $P(z) = (z - i)(z^2 + az + b)$

c) En déduire les racines de P.

3) On donne les points I , M et N des points d'affixes respectives i , $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$.

a) Montrer que : le triangle IMN est isocèle en M $\Leftrightarrow$ $2\, sin^2\theta + \sin\theta - 1 = 0$.

b) Déterminer les valeurs de θ pour que le triangle IMN soit isocèle en M.

REJAOUI A

Tunisie DEVOIR.TN